Faser i den matematiske problemløsingsprosessen

Fagteksten om «Problemløsing i matematikk» avsluttet med å vise til matematikeren George Polya som hevdet at problemløsing i matematikk kan deles inn i fire faser:

1. Forstå problemet
2. Lage en plan for å løse problemet
3. Utføre planen
4. Se tilbake

I denne fagteksten skal vi se nærmere på ulike faser i den matematiske problemløsingsprosessen. En norsk matematiker som har arbeidet med problemløsing gjennom flere tiår, Hans Erik Borgersen (1994) har tatt utgangspunkt i modellen til Polya og utvidet den slik at den matematiske problemløsingsprosessen kan deles inn i sju faser:

1. Analysere og definere problemet
2. Lage en tegning / modell / hjelpefigur
3. Prøve og feile som kan føre til kvalifisert gjetting
4. Finne en hypotese
5. Utvikle et bevis
6. Reflektere over løsning og løsningsprosess
7. Generalisere problemet og formulere nye utvidelser av problem

Dere ble bedt om å arbeide med et matematisk problem mellom 1. og 2. økt. Et av disse var følgende problem innen geometri:

A. Velg et punkt P i planet. Konstruer en likesidet trekant slik at P er et indre punkt og slik at avstanden fra P til sidene i trekanten er henholdsvis 3, 5 og 7 cm.

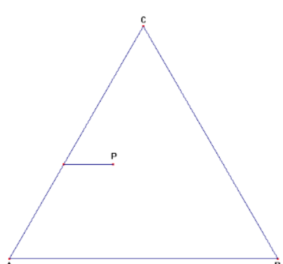
B. Velg en vilkårlig likesida trekant ABC. La P være et indre punkt. La d_a, d_b, d_c være avstandene fra P til sidene i trekanten (d_a er avstanden fra P til sida som er motstående til A, etc.)

a) Velg ulike plasseringer av P og mål d_a, d_b, d_c hver gang. Lag tabell og let etter mønster. Prøv å formulere en hypotese.
b) Prøv å bevise hypotesen i a).
c) Prøv å generalisere problemet (se punkt B ovenfor).

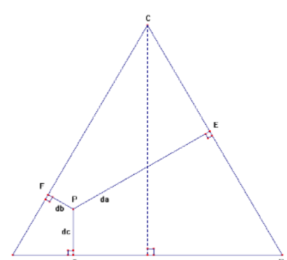
Vi skal bruke dette problemet som eksempel for å illustrere problemløsingsmodellene til Polya (1945/1957) og Borgersen (1994). Når dere skal starte med å arbeide med et slikt problem er det viktig å lese teksten grundig slik at dere *forstår problemet* (Polya) og *analyserer og definerer problemet* (Borgersen). Dere legger kanskje merke til at problem A kan løses for seg selv, altså det er et eget delproblem der dere skal konstruere en likesidet trekant. Her er det viktig å analysere problemet og finne ut hvordan dere skal starte konstruksjonen. En vanlig måte å konstruere en trekant på vil ofte være å bruke opplysninger om sider og vinkler i trekanten som er kjent, men i dette tilfelle er det andre opplysninger som er gitt, avstanden fra *P* til sidene i trekanten. Ved å lage en hjelpetegning/hjelpefigur, innføre passende notasjon og stille seg ulike spørsmål som belyser hva en skal finne, hvilke opplysninger en har og hvilke betingelser som finnes i problemet, kan slike betraktninger spille en viktig rolle for det videre arbeidet med problemet. For å forstå/analysere problem A, kan det være hensiktsmessig å *lage en hjelpetegning/hjelpefigur* som kan være til hjelp for å forstå hvordan dere skal starte konstruksjonen av den likesidete trekanten.

Når det gjelder det neste problemet (B), så er dette delt opp i delproblemene a) til c). Disse henger sammen som et sammensatt problem. Ved oppstarten av problem B a), vil det være nærliggende å bruke erfaringer fra det forrige problemet A som en hjelp i løsingsprosessen. Polya understreker betydningen av å tenke over om man har sett problemet før eller løst et lignende problem tidligere som kan være til hjelp, altså å benytte problemløsingsstrategien å knytte problemet til analoge, beslekta problemer.

For å forstå/analysere problemet, vil det her være nyttig å tegne en hjelpefigur som illustrerer avstandene d_a, d_b, d_c der disse er avstandene fra *P* til sidene i trekanten (der d_a er avstanden fra *P* til sida som er motstående til A, etc.). I denne fasen er det også viktig å avklare, hvordan måles avstandene fra punktet *P* til trekantsidene? Her kan en ide trolig være å måle fra *P* og vannrett ut til ei trekantside slik som Figur 1 viser. En annen ide vil være å måle «vinkelrett» fra P til trekantsidene slik Figur 2 viser.



Figur 1



Figur 2

Når dere har forstått problemet, begynner arbeidet med å velge ulike plasseringer av punktet *P* og foreta målinger av avstandslengdene d_a, d_b, d_c. Måleresultater settes i en tabell for å se etter mønstre. Her blir den tredje fasen i Borgersen sin problemløsingsmodell, *prøve og feile som kan føre til kvalifisert gjetting,* viktig for å lete etter sammenhenger som kan gi muligheter til å *finne en eller flere hypoteser* med grunnlag i måleresultatene. Den neste fasen i problemløsingsprosessen handler om å *utvikle et bevis* for den eller de hypotesene som er funnet. Dette kan for eksempel være å presentere et algebraisk eller et geometrisk bevis for at hypotesen gjelder. De to siste fasene hos Borgersen, *reflektere over løsning og løsningsprosess* og *generalisere problemet og formulere utvidelser av problemet* er sterkt knyttet til Polya sin fjerde fase, *se tilbake*. Mulige utvidelser av problemet kan være: gjelder hypotesen som er funnet for andre typer trekanter (likebeint, rettvinklet, generell?), gjelder hypotesen for andre mangekanter, for eksempler for et kvadrat, et rektangel, eller for regulære femkanter eller sekskanter? En annen innfallsvinkel til å endre problemet vil være å undersøke hva skjer hvis punktet *P* ikke er et indre punkt, men at punktet *P* kan plasseres utenfor den likesida trekanten?

Ikke alle problemer trenger nødvendigvis å være innom alle de sju fasene i Borgersen sin problemløsingsmodell, men disse fasene kan være til hjelp når en skal arbeide med et matematisk problem der løsningen og løsingsmetoden ikke er gitt for de som skal løse det. For det andre problemet som dere kan velge å arbeide med, *summer av påfølgende tall*, vil en annen problemløsingsstrategi være viktig når dere skal forstå/analysere problemet. Den kjente matematikeren John Mason kaller dette for «specialising», prøv noen enkle eksempler for å få en bedre oversikt/forståelse av problemet, altså prøv noen enkle summer av påfølgende tall og utforsk hvilke sammenhenger dere ser.

Kilder:

Borgersen, H. E. (1994). Open ended problem solving in geometry. *Nordisk Matematikkdidaktikk*, *2*, 2, 6-35.

Pólya, G. (1945/1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2. utg.). Princeton University Press.